一、 微分中值定理及其应用

1. 微分中值定理及其相互关系

罗尔定理

$f'(\xi)=0$

$f(a)=f(b)$

拉格朗日中值定理

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$F(x)=x$

$F(x)=x$

$f(a)=f(b)$

$n=0$

柯西中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

泰勒中值定理

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

2. 微分中值定理的主要应用

(1) 研究函数或导数的性态

(2) 证明恒等式或不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

3. 有关中值问题的解题方法

利用**逆向思维**，设辅助函数．　一般解题方法:

(1) 证明含一个中值的等式或根的存在，多用**罗尔定理**，可用原函数法找辅助函数．

(2)所证式中出现两端点，可考虑用**拉格朗日定理**.

(3) 若结论中涉及到含中值的两个不同函数，可考虑用**柯西中值定理**.

(4) 若结论中含两个或两个以上的中值，必须**多次应用中值定理**.

(5) 若已知条件中含高阶导数，多考虑用**泰勒公式**，有时也可考虑**对导数用中值定理**.

(6) 若结论为不等式，要注意**适当放大**或**缩小**的技巧.

例1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3,\ f(3)=1$, 试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0.$

例2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $0<a<b$,试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

例2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $0<a<b$,试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

例 3 $f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=1$ 试证存在ζ，$\eta\in(a,b)$使得$e^{\eta-\zeta}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$

例4 **求下列极限：**

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x];$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^{2}}}$

导数应用

1. 研究函数的性态:

增减， 极值， 凹凸，拐点，渐近线，曲率

2. 解决最值问题

- 目标函数的建立与简化
- 最值的判别问题

3. 其他应用： 求不定式极限； 几何应用；

相关变化率; 证明不等式； 研究方程实根等.

例1. 证明 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

例3. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项 .

例4. 设 $f(0)=0$,且在 $[0,+\infty)$ 上 $f'(x)$ 存在 , 且单调递减 , 证明对一切 $a>0, b>0$ 有

$$f(a+b)<f(a)+f(b)$$

例2. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导, 且 $f(x)+f'(x)>0$,

证明$f(x)$至多只有一个零点.

例5. 证明当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x \geq (x-1)^2$.

例5. 证明当 $x > 0$ 时，$(x^2 - 1)\ln x \geq (x-1)^2$.

(5) 若已知条件中含高阶导数，多考虑用泰勒公式，有时也可考虑对导数用中值定理．

(6) 若结论为不等式，要注意适当放大或缩小的技巧.

例5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)$, 且 $|f''(x)|\le 2$, 证明 $|f'(x)|\le 1.$